

Logic mệnh đề

Logic là gì?

Là một nhánh của triết học và toán học nghiên cứu về nguyên tắc, phương pháp và tiêu chuẩn hình thức cho sự hợp lệ của suy luận, và kiến thức.

- ☞ Là khoa học **ước lượng các suy luận**
- ☞ Các luật của logic xác định ý nghĩa **chính xác** của một lý luận
- ☞ Logic dùng để làm gì?
 - ☛ Suy luận toán học
 - ☛ Khoa học máy tính: vi mạch, xây dựng chương trình, kiểm chứng chương trình, trí tuệ nhân tạo, ...

Mệnh đề (proposition) là gì ?

Mệnh đề là một câu hoặc đúng hoặc sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai

Ví dụ:

- ☞ Thành phố Hồ Chí Minh là trung tâm kinh tế lớn nhất Việt Nam.
- ☞ Không có kẹt xe ở thành phố Hồ Chí Minh.
- ☞ $2 + 3 = 6$.
- ☞ Một đồ thị đầy đủ có $n(n - 1)/2$ cạnh.

Những câu **không** là mệnh đề

Ví dụ:

☞ Kinh tế Mỹ khi nào phục hồi ?

Không là phát biểu

☞ $x + 1 = 2$

Không đúng hoặc sai vì x **chưa được gán trị**

☞ What a beautiful woman !

Câu **cảm thán**

☞ Học đi.

Câu **sai khiến**

Mệnh đề phải là câu **trần thuật (statement).**

Xác định đúng/sai

Xác định đúng/sai của 1 mệnh đề **không phải là nhiệm vụ** của logic.

Ví dụ: Giả định nổi tiếng của Goldbach
Mọi số chẵn lớn hơn 2 là tổng của 2 số nguyên tố.

Câu có chứa thời gian chỉ là mệnh đề khi thời gian đã **được xác định**.

Ví dụ: Hôm nay là thứ tư.

Những câu sau là mệnh đề không ?

Ví dụ:

- ☞ Anh ta đi trên cầu Văn Thánh.
- ☞ Nơi đó đang lún.
- ☞ Miami là thủ đô của Florida. (Tallahassee)
- ☞ Trả lời câu hỏi này.
- ☞ $x + y = y + x$ với mọi số thực x và y .
- ☞ Sinh viên bách khoa không thích môn toán.

Một số quy ước, định nghĩa

- ☞ p, q, r, \dots dùng để ký hiệu mệnh đề
- ☞ **Giá trị chân lý** đúng của 1 mệnh đề ký hiệu là T, sai ký hiệu F

- ☞ **Bảng chân lý** (truth table) biểu diễn mối quan hệ giữa những giá trị chân lý của các mệnh đề

p	$\neg p$
T	F
F	T

Mệnh đề phức hợp

- ☞ **George Boole [1854] - nhà toán học người Anh**
- The Mathematical Analysis of Logic (1848)
 - The Law of Thought (1854), bây giờ gọi là **Đại số Boole**

Mệnh đề phức hợp (compound proposition) được tạo ra bằng cách **kết hợp** các mệnh đề hiện có bằng các **toán tử logic**.

Các toán tử logic

Giả thiết p, q là mệnh đề

☞ $\neg p$: phủ định (negation)

☞ $p \wedge q$: toán tử hội (conjunction)

☞ $p \vee q$: toán tử tuyển (disjunction)

☞ $p \oplus q$: toán tử tuyển loại (exclusive-OR)

☞ $p \rightarrow q$: toán tử kéo theo (implication)

Bảng chân lý của các toán tử logic

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F		F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F		F	F	F	T	T

Những thuật ngữ khác của \rightarrow

Phép kéo theo dùng nhiều trong suy luận toán học

- ➡ Nếu p thì q
- ➡ p chỉ nếu q
- ➡ p kéo theo q
- ➡ p là điều kiện đủ của q
- ➡ q là điều kiện cần của p

Tại sao "kéo theo" chỉ sai với $T \rightarrow F$?

Ví dụ: Nếu thu nhập từ 5 triệu đồng 1 tháng trở lên, công dân phải đóng thuế thu nhập cá nhân.

- ☞ Không đề cập đến những người < 5 triệu
⇒ luôn đúng với mọi hệ quả q
- ☞ Chỉ sai khi đúng mệnh đề giả thiết p , nhưng không tuân theo mệnh đề hệ quả q
⇒ sai do vi phạm pháp luật

Phép "kéo theo" và quan hệ "nhân-quả"

- ☞ Quan hệ nhân (hypothesis, antecedent, premise)-quả (conclusion, consequence): có quan hệ ngữ nghĩa trong "nhân" và "quả"

Ví dụ: Nếu anh A chơi Võ lâm truyền kỳ quá nhiều thì anh ta bị người yêu bỏ.

- ☞ Kéo theo trong logic

Ví dụ: Nếu hôm nay lớp học toán rời rạc buồn ngủ thì $10-3=6$.

Kéo theo trong logic tổng quát hơn nhân-quả trong ngôn ngữ tự nhiên

Mệnh đề đảo, phản đảo, khi và chỉ khi

Cho mệnh đề $p \rightarrow q$

☞ $q \rightarrow p$ được gọi là mệnh đề **đảo** (converse)

☞ $\neg q \rightarrow \neg p$ được gọi là mệnh đề **phản đảo** (contrapositive)

Ví dụ:

⇒ Nếu anh A chơi Võ lâm truyền kỳ quá nhiều thì anh ta bị người yêu bỏ.

⇒ Mệnh đề đảo:.....?

⇒ Mệnh đề phản đảo:.....?

☞ $p \leftrightarrow q$ là T khi cả 2 $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow p$ là T.

Diễn giải ngôn ngữ tự nhiên (1)

Ví dụ: **Nếu** người đi bộ băng qua đường **thì hoặc là** đèn điều khiển đang xanh **hoặc là** sức khỏe người đi bộ **không** tốt.

Ví dụ:

$\Rightarrow p$: Người đi bộ băng qua đường.

$\Rightarrow q$: đèn điều khiển đang xanh.

$\Rightarrow r$: sức khỏe người đi bộ tốt.

$\Rightarrow p \rightarrow (q \vee \neg r)$

Diễn giải ngôn ngữ tự nhiên (2)

Ví dụ: Người đi xe máy không thể vượt đèn đỏ nếu anh ta thấy công an trừ khi anh ta quá liều.

Diễn giải ngôn ngữ tự nhiên (2)

Ví dụ: Người đi xe máy **không thể** vượt đèn đỏ **nếu** anh ta thấy công an **trừ khi** anh ta quá liều.

Ví dụ:

$\Rightarrow p$: Người đi xe máy có thể vượt đèn đỏ.

$\Rightarrow q$: Anh ta thấy công an.

$\Rightarrow r$: Anh ta quá liều.

$\Rightarrow (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$

Tìm kiếm dùng toán tử logic

Ví dụ: Dùng Google:
logic proposition OR predicate -philosophy

Mệnh đề tương đương

Hai mệnh đề phức hợp p, q được gọi là tương đương nếu chúng có cùng bảng chân lý

Hai mệnh đề phức hợp p, q được gọi là tương đương nếu $p \leftrightarrow q$ là **hằng đúng** (tautology).

➡ **Tautology** = mệnh đề luôn đúng

➡ **Mâu thuẫn (contradiction)**: mệnh đề luôn sai

Chứng minh sự tương đương (1)

Một cách chứng minh sự tương đương là dùng bảng chân lý

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

$$\Rightarrow \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Một số tương đương quan trọng (1)

$p \wedge T \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	Luật đồng nhất Identity laws	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Luật giao hoán Commutative laws
$p \vee T \Leftrightarrow T$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$	Luật nuốt Domination laws	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Luật kết hợp Associative laws
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Luật lũy đẳng Idempotent laws	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Luật phân phối Distribute laws
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Luật phủ định kép Double negation law	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Luật De Morgan De Morgan's laws

Một số tương đương quan trọng (2)

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Chứng minh sự tương đương (2)

Ví dụ: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Dạng chuẩn hội (conjunctive normal form - CNF)

➔ Là hội của các mệnh đề, trong đó mệnh đề là tuyển của các công thức nguyên tử (atomic formula = A hoặc $\neg A$)
(Tích các tổng - product of sums)

Ví dụ:

$$A \wedge B$$

$$\neg A \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (D \vee \neg E)$$

Và những mệnh đề sau là không phải

$$\neg(B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$A \wedge (B \vee (D \wedge E))$$

Nhưng có thể biến đổi tương đương sang dạng chuẩn hội

$$\neg A \wedge \neg B$$

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee D) \wedge (V \vee E)$$

- ➡ **Mọi công thức mệnh đề đều có thể biến đổi tương đương sang dạng CNF dựa vào những phép biến đổi tương đương logic (như đã trình bày ở trước)**

Dạng chuẩn tuyển (disjunctive normal form - DNF)

☞ Là tuyển của các mệnh đề, trong đó mệnh đề là hội của các công thức nguyên tử (atomic formula = A hoặc $\neg A$)
(Tổng các tích - sum of products)

Ví dụ:

$$A \vee B$$

$$A$$

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg D \wedge E \wedge F)$$

Và những mệnh đề sau là không phải

$$\neg(B \vee C)$$

$$A \vee (B \wedge (C \vee D))$$

- ☞ Mọi công thức mệnh đề đều có thể biến đổi tương đương sang dạng DNF dựa vào những phép biến đổi tương đương logic (như đã trình bày ở trước)

CNF và DNF tổng quát

$$\text{CNF} = C_1 \wedge \dots \wedge C_n$$

Trong đó

$$C_i = A_1 \vee \dots \vee A_m, \text{ và}$$

$A_i =$ công thức nguyên tử

$$\mathbf{DNF} = C_1 \vee \dots \vee C_n$$

Trong đó

$$C_i = A_1 \wedge \dots \wedge A_m, \text{ và}$$

$A_i =$ **công thức nguyên tử**

Chứng minh

$$\Rightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

$$\Rightarrow p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r)$$

\Rightarrow Tham khảo và chứng minh những sự tương đương logic trong sách tham khảo, trang 17-18.

\Rightarrow Những thông tin liên quan về logic có thể tìm thấy trong <http://en.wikipedia.org/wiki/Logic>